Лабораторное занятие 10

НАРАЩЕНИЕ И ДИСКОНТИРОВАНИЕ ДЕНЕЖНЫХ СУММ

Наращение сложных процентов

При наращении по схеме сложных процентов за каждый промежуток времени, база начислений процентов меняется, а именно – проценты начисляются на проценты. Пусть имелась сумма $S(0)$ и действует ставка сложных процентов i . К концу первого базового промежутка времени эта сумма возрастет на величину $iS(0)$, в результате имеем сумму $S(1) = S(0)(1+i)$, то есть сумма увеличилась в $1+i$ раз. За второй базовый период времени эта сумма возрастет еще в $1+i$ раз, в результате получим сумму $S(2) = S(0)(1+i)^2$. Продолжая этот процесс, получим, что:

$$S(n) = S(0)(1+i)^n \qquad (2)$$

Формула наращения по схеме сложных процентов $S(n) = S(0)(1+i)^n$, полученная для целых положительных значений числа базовых периодов времени, вполне может применяться и для нецелых значений числа базовых периодов времени.

Пример. Какой величины достигнет капитал в 8 000 через 3,7 года, отданный в рост по сложной ставке 13 % годовых.

Решение. $S(3{,}7) = S(0)(1+0{,}13)^{3{,}7} = 12574{,}19$.

Пример. Через сколько лет удвоится капитал, отданный в рост под сложные 13 % годовых.

Решение. Пусть исходный капитал $S(0)$, тогда наращенный капитал $S(n) = S(0)(1+0{,}13)^n = 2S(0)$, отсюда $n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}13} = 5{,}67$.

Очень часто при работе со сложными процентами для приближенного оценивания времени удвоения капитала полезно применять правило.

эквивалентными по ставке сложных процентов i, если выполняется равенство $S(n_2) = S(n_1)(1+i)^{n_2 - n_1}$. Сама формула:

$$S(n_2) = S(n_1)(1+i)^{n_2 - n_1} \qquad (3)$$

называется ***формулой математического дисконтирования***, при этом неважно, какой из периодов времени n_1 или n_2 больше.

Пример. Долг размером 13000 должен быть выплачен через 540 дней. Кредит выдан под 11 % годовых. Найти современную величину долга и дисконт. В году считать 360 дней.

Решение. $n = \dfrac{540}{360} = 1{,}5$, тогда современная величина $S(0) = 13000(1+0{,}11)^{-1{,}5} = 1116{,}26$.

Дисконт $D = 13000 - 1116{,}26 = 1883{,}74$.

Номинальная ставка процента

При выполнении финансовых операций часто в качестве периода времени используется месяц, квартал и т. д. В этом случае говорят, что проценты начисляются m раз в году. В договорах обычно фиксируется годовая ставка, которая в этом случае называется ***номинальной***. Сложная ставка процента является частным случаем номинальной при начислении процентов один раз в году. Пусть i номинальная ставка процента, тогда проценты, начисляемые за один

Правило 72. *Если сложная процентная ставка равна* i, *то удвоение капитала по такой ставке произойдет примерно за* $\dfrac{72}{i}$ *лет.*

Это правило вытекает из решения предыдущего примера $n = \dfrac{\ln 2}{\ln(1+i)}$. Для небольших процентов $\dfrac{72}{i}$. Конечно, это грубая оценка, и она применима лишь для небольших ставок процентов.

Дисконтирование сложных процентов

Зная наращенную величину капитала $S(n)$, ставку сложного процента i и срок операции n, используя формулу (2), найдем современную величину капитала $S(0) = S(n)(1+i)^{-n}$.

Величина $D = S(n) - S(0)$ называется дисконтом.

Исходя из формул наращения и дисконтирования, по ставке сложных процентов получим, что два капитала $S(n_1)$ и $S(n_2)$, заданные в различные периоды времени, назовем

эквивалентными по ставке сложных процентов i, если выполняется равенство $S(n_2)=S(n_1)(1+i)^{n_2-n_1}$. Сама формула:

$$S(n_2)=S(n_1)(1+i)^{n_2-n_1} \qquad (3)$$

называется ***формулой математического дисконтирования***, при этом неважно, какой из периодов времени n_1 или n_2 больше.

Пример. Долг размером 13000 должен быть выплачен через 540 дней. Кредит выдан под 11 % годовых. Найти современную величину долга и дисконт. В году считать 360 дней.

Решение. $n=\dfrac{540}{360}=1{,}5$, тогда современная величина $S(0)=13000(1+0{,}11)^{-1{,}5}=1116{,}26$.

Дисконт $D=13000-1116{,}26=1883{,}74$.

Номинальная ставка процента

При выполнении финансовых операций часто в качестве периода времени используется месяц, квартал и т. д. В этом случае говорят, что проценты начисляются m раз в году. В договорах обычно фиксируется годовая ставка, которая в этом случае называется ***номинальной***. Сложная ставка процента является частным случаем номинальной при начислении процентов один раз в году. Пусть i номинальная ставка процента, тогда проценты, начисляемые за один период, равны $\dfrac{i}{m}$, при этом число начислений процентов равно mn. Тогда формула математического дисконтирования (3) примет вид:

$$S(n_2)=S(n_1)\left(1+\frac{i}{m}\right)^{(n_2-n_1)m} \qquad (4)$$

Пример. Дан капитал размером 15 000. Найти его значение за 1,5 года до сегодняшнего момента и через 3,5 года после сегодняшнего момента. Если годовая сложная ставка 14 %, проценты начисляются ежеквартально.

Решение. $S(0)=15000,\ i=0{,}14,\ \ m=4$

$$S(-1{,}5)=15000\left(1+\frac{0{,}14}{4}\right)^{-1{,}5\cdot 4}=1202{,}51,$$

$$S(3{,}5)=15000\left(1+\frac{0{,}14}{4}\right)^{3{,}5\cdot 4}=24280{,}42.$$

Сложная учетная ставка

Учет сложной учетной ставки производится аналогично учету простой процентной ставки.

Пусть задана сложная учетная ставка d, приведенная к базовому периоду времени, n – срок от момента учета до момента погашения, тогда формула для расчета суммы, выданной в момент учета, имеет вид $S(0)=S(n)(1-d)^n$. Эта формула может быть использована и при нахождении наращенной величины $S(n)$ по заданной учетной ставке d.

Пример. Вексель номиналом 25 000 учтен за 2,3 года по сложной процентной ставке 19 % годовых. Определить сумму, полученную владельцем векселя, и дисконт при ежегодном и ежеквартальном дисконтировании.

Решение. $S(2{,}3)=25000,\ d=0{,}19$.

Ежегодное дисконтирование

$$S(0)=25000(1-0{,}19)^{2{,}3}=15397{,}69,\ D=25000-15397{,}69=9602{,}31.$$

Ежеквартальное дисконтирование

$$S(0)=25000\left(1-\frac{0{,}19}{4}\right)^{2{,}3\cdot4}=15977{,}09,\ D=25000-15977{,}09=9022{,}91.$$

Дополнительные материалы

Сложные проценты широко применяются в финансовых операциях, срок проведения которых превышает *один год*. Вместе с тем они могут использоваться и в краткосрочных финансовых операциях, если это предусмотрено условиями сделки либо вызвано объективной необходимостью (например, высоким уровнем инфляции, риска и т. д.) При этом база для исчисления процентов за период включает в себя как исходную сумму сделки, так и сумму уже накопленных к этому времени процентов.

Общее соотношение для определения будущей величины имеет вид:

$$\mathbf{FV_n = PV\,(1 + r)^n}$$

Нетрудно заметить, что величина FV существенно зависит от значений r и n. Например, будущая величина суммы всего в 1,00 ед. при годовой ставке 15% через 100 лет составит 1 174 313,45 ед.

На практике, в зависимости от условий финансовой сделки, проценты могут начисляться несколько раз в году, например, ежемесячно, ежеквартально и т. д. В этом случае соотношение для исчисления будущей стоимости будет иметь следующий вид:

ЕЩЕ СМОТРИТЕ: Определение стоимости капитала: простое решение сложной задачи

$$\mathbf{FV_n = P\,V\,(1 + r / m)^m}$$

где m — число периодов начисления в году.

Часто возникает необходимость сравнения условий финансовых операций, предусматривающих **различные периоды начисления процентов.** В этом случае осуществляют приведение соответствующих процентных ставок к их годовому эквиваленту по формуле:

$$\mathbf{EPR = (1 + r / m)^m - 1}$$

Полученную при этом величину называют **эффективной процентной ставкой** *(effective percentage rate — EPR)*, или ставкой сравнения.

Пример. На 4-летний депозит в 10 000,00 ед. производится ежеквартальное начисление сложных процентов по ставке 2,5%, т. е. из расчета 10% годовых. Будет ли эквивалентной инвестицией депозит в 10 000,00 ед., вложенный на тот же срок под 10%, начисляемых один раз в год?

Рассчитаем эффективную ставку для обеих операций:

ежеквартально $EPR = (1 + 0{,}1/4)^4 - 1 = (1 + 0{,}025)^4 - 1 = 0{,}103813$ *ед.,*

ежегодно $EPR = (1 + 0{,}1 / 1)^1 - 1 = 0{,}10$ *ед.*

Таким образом, условия помещения суммы в 10 000,00 ед. на депозит сроком на 4 года под 2,5%, начисляемых ежеквартально, будут эквивалентными годовой ставке, равной 10,3813%. Следовательно, первая операция более выгодна для инвестора.

Дисконтирование по сложным процентам

Формулу для определения современной величины по сложным процентам можно легко вывести формулы сложных процентов делением его обеих частей на величину $(1 + r)^{n}$. Выполнив соответствующие математические преобразования, получим:

$$\mathbf{PV_n = FV_n / (1 + r)^n}$$

Пример. *Выплаченная по 3-летнему депозиту сумма составила величину 100 ед. Определить первоначальную величину вклада, если ставка по депозиту равна 8% годовых. Аналитическое решение задачи будет иметь следующий вид:*

$PV = 100{,}00 / (1 + 0{,}08)^3 = 79{,}38$ *ед.*

Если начисление процентов осуществляется m раз в году, соотношение будет иметь вид:

$$\mathbf{PV_{n,m} = FV_n (1 + r / m)^{mn}}$$

Методы наращения и дисконтирования играют важную роль в финансовом менеджменте, так как являются инструментарием для оценки потоков платежей.